Análisis Matemático I

1. (1 punto) Sea (E,d) un espacio métrico. Prueba la desigualdad:

$$|\mathrm{d}(x,y)-\mathrm{d}(z,u)| \leqslant \mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(y,u) \qquad (x,y,z,u \in E)$$

   Deduce que si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$ entonces $\{\mathrm{d}(x_n,y_n)\} \to \mathrm{d}(x,y)$.

2. (2 puntos) Definamos $\rho : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_o^+$ por

$$\rho(x,y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y| \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

   Prueba que ρ es una distancia en $\mathbb{R}$ equivalente a la usual y que el espacio métrico $(\mathbb{R},\rho)$ no es completo.

3. (2 puntos) Sea (E,d) un espacio métrico y $K \subset E$ un compacto no vacío. Prueba que hay elementos $a \in K$, $b \in K$ tales que $\mathrm{diam}(K) = \mathrm{d}(a,b)$.

4. (2 puntos) Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua tal que para todos $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{F}(\mathbf{x})-\mathbf{F}(\mathbf{y})\|$. Prueba que la imagen de $\mathbf{F}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$.

5. (3 puntos) Demuestra el teorema de Haussdorff: *Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes*. Indica algunas de sus consecuencias.